

◆ CHƯƠNG 4. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

▣ BÀI 1. NGUYÊN HÀM

*. Đề kiểm tra rèn luyện

♦ Đề 1:

☞ **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin(2x+1)$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos(2x+1).$

B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\cos(2x+1).$

C. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cos(2x+1).$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x+1).$

Lời giải

$$+ \left(\frac{1}{2}x^2 - \cos(2x+1) \right)' = x + 2\sin(2x+1).$$

$$+ \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\cos(2x+1) \right)' = x + 4\sin(2x+1).$$

$$+ \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cos(2x+1) \right)' = x - \sin(2x+1).$$

$$+ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x+1) \right)' = x + \sin(2x+1). \text{ Vậy } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cos(2x+1) \text{ là một nguyên}$$

hàm của hàm số $f(x) = x + \sin(2x+1).$

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$ là

A. $F(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + C.$

B. $F(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x.$

C. $F(x) = 12x^2 - 3x + C.$

D. $F(x) = 12x^4 - 3x^2 - x + C.$

Lời giải

$$\int (4x^3 - 3x - 1) dx = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + C.$$

Câu 3: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x}$ thỏa mãn $F(1) = \frac{5}{3}$ là

A. $F(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2.$

B. $F(x) = x^3 - x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}.$

C. $F(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}.$

D. $F(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2.$

Lời giải

+ $F(x) = \int (3x^2 - 2\sqrt{x}) dx = x^3 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

+ $F(1) = -\frac{1}{3} + C = \frac{5}{3} \Rightarrow C = 2.$

+ Vậy $F(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2.$

Câu 4: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2\sin x - \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $F(x) = 2\cos x - \sin x - 1.$

B. $F(x) = 2\cos x + \sin x - 1 - \sqrt{3}.$

C. $F(x) = -2\cos x - \sin x + 1.$

D. $F(x) = -2\cos x - \sin x - 1.$

Lời giải

+ $F(x) = \int (2\sin x - \cos x) dx = -2\cos x - \sin x + C.$

+ $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} + C = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 1.$

+ Vậy $F(x) = -2\cos x - \sin x + 1.$

Câu 5: Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = 2024^x$ là

A. $2024^x + C.$

B. $\frac{2024^{x+1}}{2024} + C.$

C. $\frac{2024^x}{\ln 2024} + C.$

D. $2024^x \cdot \ln 2024 + C$

Lời giải

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = 2024^x$ là $\frac{2024^x}{\ln 2024} + C.$

Câu 6: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x} + 1$ là

A. $3e^{3x} + C.$

B. $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$

C. $3e^{3x} + x + C.$

D. $\frac{1}{3}e^{3x} + x + C.$

Lời giải

Ta có

$$\int f(x)dx = \int (e^{3x} + 1)dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) + \int dx + C = \frac{1}{3} e^{3x} + x + C.$$

Câu 7: Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.

- A.** $\ln^2 x + C$. **B.** $-\frac{1}{x^3} + C$. **C.** $\frac{1}{2} \ln x + C$. **D.** $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int \frac{1}{x} \ln x dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x+1} \ln(3x+1) + 2^x + 2024$ với mọi $x \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

- A.** $\frac{3}{2} \ln^2(3x+1) + \frac{2^x}{\ln 2} + 2024x + C$. **B.** $\frac{3}{2} \ln^2(3x+1) + 2^x \ln 2 + 2024x + C$.
C. $\frac{1}{6} \ln^2(3x+1) + \frac{2^x}{\ln 2} + 2024x + C$. **D.** $\frac{1}{6} \ln^2(3x+1) + 2^x \ln 2 + 2024x + C$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \left[\frac{1}{3x+1} \ln(3x+1) + 2^x + 2024 \right] dx = \int \frac{1}{3x+1} \ln(3x+1) dx + \int 2^x dx + \int 2024 dx \\ &= \frac{1}{3} \int \ln(3x+1) d[\ln(3x+1)] + \frac{2^x}{\ln 2} + 2024x + C = \frac{1}{6} \ln^2(3x+1) + \frac{2^x}{\ln 2} + 2024x + C. \end{aligned}$$

Câu 9: Họ nguyên hàm của $\frac{2}{x}$ là

- A.** 2 . **B.** $2 \ln|x| + C$. **C.** $\frac{2}{x^2}$. **D.** $2 \ln|x|$.

Lời giải

Ta có:

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| + C.$$

Câu 10: $\int \frac{x^2+1}{x} dx$ bằng

- A.** $x^2 + \ln|x|$. **B.** $\frac{x^2}{2} + \ln|x|$. **C.** $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$. **D.** $\frac{x}{2} + \ln|x| + C$.

Lời giải

Ta có:

$$\int \frac{x^2+1}{x} dx = \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $\int f(x) dx = \ln|x| + \tan x + C.$

B. $\int f(x) dx = \ln x + \tan x + C.$

C. $\int f(x) dx = \ln x + \tan|x| + C.$

D. $\int f(x) dx = \ln|x| + \tan x.$

Lời giải

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \ln|x| + \tan x + C$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ và $f(0) = 1$. Khi đó $f(x)$ bằng

A. $\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$

B. $\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 3.$

C. $\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1.$

D. $\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2.$

Lời giải

Ta có:

$$\int f'(x) dx = \int (x^2 - 2x - 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C.$$

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1.$

Vậy $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1.$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ và $F(x) = \int f(x) dx$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $F'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$

b) Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x.$

d) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Khi đó $F(1) = \frac{5}{4}.$

Lời giải

Câu 1
a) Đ
b) Đ

c) S
d) S

a) Do $F(x) = \int f(x)dx$ nên $F'(x) = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Vậy câu a) đúng.

b) Do $y' = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = f(x)$ nên câu b) đúng.

c) Do $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x + C. \text{ Vậy câu c) sai.}$$

d) Có $F(0) = C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{4}$. Vậy câu d) sai.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ và $F(x) = \int f(x)dx$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $F'(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}$.

c) $F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-3}{x-1} + C$.

d) Biết $F(2) = 2$ và $F(-1) = 5$. Khi đó $F\left(\frac{3}{2}\right) + F(4) < 10$.

Lời giải

Câu 2
a) Đ
b) S
c) S
d) Đ

a) $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$. Vậy câu a) đúng.

b) Do $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{2}{x^2 - 4x + 3} = 2f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right)$ nên câu

b) sai.

c)

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{2} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-3| - \ln|x-1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$$

Vậy câu c) sai.

d) Ta có $F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-3}{x-1} + C_1$ khi $x \in (1; 3)$ và $F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-3}{x-1} + C_2$ khi $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

$$\text{Có } F(2) = C_1 = 2 \Rightarrow F\left(\frac{3}{2}\right) = \ln \sqrt{3} + 2.$$

$$F(-1) = \frac{1}{2} \ln 2 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = 5 - \ln \sqrt{2} \Rightarrow F(4) = -\ln \sqrt{3} + 5 - \ln \sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } F\left(\frac{3}{2}\right) + F(4) = \ln \sqrt{3} + 2 + 5 - \ln \sqrt{3} - \ln \sqrt{2} = 7 - \ln \sqrt{2} < 10$$

Vậy câu d) đúng.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\int f(x) dx = x + \ln|x| + C$.
- b) Nếu $F(1) = 0$ thì $F(2) = 2 + \ln 2$.
- c) $F(2x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)$.
- d) Hàm số $f(e^x)$ có một nguyên hàm là $2x + e^{-x}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Sai.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2x+1}{x} dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} \right) dx = 2x + \ln|x| + C.$$

b) Đúng.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2x+1}{x} dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} \right) dx = 2x + \ln|x| + C, \text{ suy ra } F(x) = 2x + \ln|x| + C.$$

$$\text{Mà } F(1) = 0 \Leftrightarrow 2.1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2.$$

Vậy $F(2) = 2.2 + \ln 2 - 2 = 2 + \ln 2$

c) Sai

Ta có $f(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow f(2x) = 2 + \frac{1}{2x}$.

$$\int f(2x) dx = \int \left(2 + \frac{1}{2x}\right) dx = 2x + \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

Mà $F(x) = 2x + \ln|x| + C \Rightarrow F(2x) = 4x + \ln|2x| + C$.

Vậy $F(2x)$ không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)$.

d) Sai.

Hàm số $f(e^x) = 2 + \frac{1}{e^x} = 2 + e^{-x} \Rightarrow \int f(e^x) dx = \int (2 + e^{-x}) dx = 2x - e^{-x} + C$.

Câu 4: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\int \left(2x + \sin \frac{x}{2}\right) dx = x^2 - \cos \frac{x}{2} + C$.

b) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} + x + C$.

c) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \ln x - \frac{2}{x} + C$.

d) $\int \frac{x^2 + \ln x}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln x + C$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------------	---------------	---------------	---------------

a) Sai.

Ta có $\int \left(2x + \sin \frac{x}{2}\right) dx = \int 2x dx + 2 \int \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 - 2 \cos \frac{x}{2} + C$.

b) Sai

Ta có $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{1}{2} \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) d(2x) = \frac{1}{2} (e^{2x} + 4x - e^{-2x}) + C$.

c) Sai

Ta có $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x^2} dx = \ln|x| - \frac{2}{x} + C$.

d) Sai.

Hàm số $\int \frac{x^2 + \ln x}{x} dx = \int \left(x + \frac{\ln x}{x}\right) dx = \int x dx + \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Xác định nguyên hàm: $I = \int (\sin^4 x + \cos^4 x) \sin 2x dx$? ta thu được kết quả có dạng $-\frac{\cos 2x}{a} - \frac{\cos^3 2x}{b} + C$. Khi đó $a^2 + b = ?$.

Lời giải

Trả lời: 28

Ta có: $(\sin^4 x + \cos^4 x) \sin 2x = ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x) \sin 2x$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\sin^4 x + \cos^4 x) \sin 2x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x\right) \sin 2x.$$

Suy ra: $I = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x\right) \sin 2x dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x\right) \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x\right) d(\cos 2x) = -\frac{1}{4} \int (1 + \cos^2 2x) d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{4} \int d(\cos 2x) - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x d(\cos 2x) = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos^3 2x}{12} + C \end{aligned}$$

Khi đó $a = 4, b = 12 \Rightarrow a^2 + b = 28$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Giá trị của $f(2)$ bằng.

Lời giải

Trả lời: 20

Ta có: $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Leftrightarrow \int \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx = \int (2x + 3) dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C.$$

Do $f(1) = 4 \Rightarrow 4 = 1 + 3 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f(2) = 20$.

Câu 3: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $F(x) = x[1 + \log(x^2 + 1)]$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần 10)

Lời giải

Kết quả: 5,3

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = 1 + [\ln(x^2 + 1)]'$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int 1dx + \int [\ln(x^2 + 1)]' dx = x + \ln(x^2 + 1) + C \Rightarrow F(x) = x + \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + \ln(0^2 + 1) + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = x + \ln(x^2 + 1).$$

$$\text{Xét phương trình } F(x) = x[1 + \log(x^2 + 1)].$$

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Phương trình} \quad \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = x \log(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln 10 \cdot \log(x^2 + 1) - x \log(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 + 1) \cdot (\ln 10 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log(x^2 + 1) = 0 \\ \ln 10 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ x = \ln 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 10 \end{cases}.$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình là $T = 0^2 + (\ln 10)^2 \approx 5,3$.

Câu 4: Một xe ô tô đang chuyển động đều thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường. Sau 1 giây thì người lái xe bắt đầu đạp phanh. Ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -5m/s^2$. Biết rằng kể từ lúc nhìn thấy chướng ngại vật cho đến khi dừng hẳn thì xe đi thêm được quãng đường 41,6 mét. Vận tốc của xe khi người lái xe bắt đầu phanh là bao nhiêu m/s ?

Lời giải

Kết quả: 16

Gọi vận tốc của xe khi bắt đầu phanh là v_0 (m/s)

Vận tốc tại thời điểm t kể từ lúc bắt đầu phanh là: $v(t) = \int (-5)dt = -5t + C$.

Vận tốc của vật tại thời điểm bắt đầu phanh xe là v_0 (m/s) nên ta có $v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 \Rightarrow v(t) = -5t + v_0$

Quãng đường vật đi được tại thời điểm t kể từ khi bắt đầu đạp phanh là $S(t) = \int v(t)dt = \int (-5t + v_0)dt = -\frac{5}{2}t^2 + v_0t + C$.

Ta có $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(t) = -\frac{5}{2}t^2 + v_0t$.

Khi xe dừng hẳn ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + v_0 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{5}$.

Quãng đường xe đi được từ khi bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là $S = S\left(\frac{v_0}{5}\right) = -\frac{5}{2}\left(\frac{v_0}{5}\right)^2 + \frac{v_0^2}{5} = \frac{v_0^2}{10}$ (m).

Quãng đường người lái xe đi từ khi nhìn thấy chướng ngại vật đến khi đạp phanh là v_0 (m).

Theo bài ra ta có phương trình $\frac{v_0^2}{10} + v_0 = 41,6$.

Giải phương trình ta được $\begin{cases} v_0 = 16 \\ v_0 = -26 \end{cases}$.

Vậy vận tốc khi người lái xe bắt đầu phanh là 16 (m/s) .

Câu 5: Giả sử hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Ta có :

$$f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C}$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \text{ nên } 1 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} + C} \Rightarrow C = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{Suy ra } f(5) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}} \approx 4,2.$$

Câu 6: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m , người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15 \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-3t + 15) dt = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\text{Cho } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5.$$

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

$$\text{Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường: } s(5) = -\frac{3 \cdot 5^2}{2} + 15 \cdot 5 = 37,5(m)$$

♦ **Đề 2:**

👉 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$

B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Lời giải

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 5$ là

A. $\frac{2x^3}{3} + x^2 - 5x + C.$

B. $\frac{x^3}{3} + x^2 - 5x + C.$

C. $\frac{x^3}{6} + x^2 - 5x + C.$

D. $\frac{x^3}{6} + x^2 - 5x.$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x - 5 \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{x^3}{6} + x^2 - 5x + C.$$

Câu 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ là

A. $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$

B. $\frac{\sqrt[3]{x}}{9} + 2\sqrt{x} + \frac{9x\sqrt{x}}{4} + C.$

C. $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$

D. $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x} \right) dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Câu 4: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x) = 3\sin x + \frac{4}{\cos^2 x}$, biết $F(0) = 2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $\frac{13}{2} + 4\sqrt{3}.$

B. $\frac{7}{2} + 4\sqrt{3}.$

C. $-\frac{3}{2} + 4\sqrt{3}.$

D. $-\frac{5}{2} - 4\sqrt{3}.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int \left(3\sin x + \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx = 3 \int \sin x dx + 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -3\cos x + 4\tan x + C.$

Do đó $F(x) = -3\cos x + 4\tan x + C.$

$F(0) = 2 \Leftrightarrow -3 + C = 2 \Leftrightarrow C = 5.$

Suy ra $F(x) = -3\cos x + 4\tan x + 5.$

Vậy $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\cos\frac{\pi}{3} + 4\tan\frac{\pi}{3} + 5 = \frac{7}{2} + 4\sqrt{3}.$

Câu 5: Cho $\int 5^x dx = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $F'(x) = 5^x \cdot \ln x.$

B. $F'(x) = 5^x.$

C. $F'(x) = 5^x + C.$

D. $F'(x) = -5^x.$

Lời giải

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số 5^x nên $F'(x) = 5^x.$

Câu 6: Hàm số $F(x) = e^{x^3}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$. **B.** $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$. **C.** $f(x) = e^{3x^2}$. **D.** $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$.

Lời giải

Ta có $f(x) = F'(x)$ suy ra $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$.

Câu 7: Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x + C$. **B.** $\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x|$. **C.** $\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| + C$. **D.** $\int \frac{2}{x} dx = \ln |x| + C$.

Lời giải

Ta có $\int \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = 2 \ln |x| + C$.

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$.

A. $\int f(x) dx = 3 + \ln |x+2| + C$. **B.** $\int f(x) dx = 3x + \ln(x+2) + C$.
C. $\int f(x) dx = 3x + \ln |x+2| + C$. **D.** $\int f(x) dx = \ln |x+2| + C$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{3x+7}{x+2} = 3 + \frac{1}{x+2}$.

$\int f(x) dx = \int \left(3 + \frac{1}{x+2} \right) dx = 3 \int dx + \int \frac{1}{x+2} dx = 3x + \ln |x+2| + C$.

Câu 9: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$ là

A. $x - \frac{1}{(x+1)^2}$. **B.** $x - \ln(x+1)$. **C.** $-\frac{1}{(x+1)^2}$. **D.** $x + \ln(x+1)$.

Lời giải

Trên $(-1; +\infty)$ ta có $(x + \ln(x+1))' = \frac{x+2}{x+1} = f(x)$.

Vậy một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$ là $x + \ln(x+1)$.

Câu 10: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$ trên $(-2; +\infty)$ là

A. $1 - \frac{2}{(x+2)^2}$. **B.** $\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln(x+2)$.
C. $1 + \frac{2}{(x+2)^2}$. **D.** $\frac{x^2}{2} - x - 2 \ln(x+2)$.

Lời giải

Trên $(-2; +\infty)$ ta có $\left(\frac{x^2}{2} - x + 2\ln(x+2)\right)' = \frac{x^2+x}{x+2} = f(x)$.

Vậy một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$ trên $(-2; +\infty)$ là $\frac{x^2}{2} - x + 2\ln(x+2)$.

Câu 11: Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x) = x^2 + \sin 2x$ là

- A.** $2x + 2\cos 2x + C$ · **B.** $2x - 2\cos 2x + C$ · **C.** $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\cos 2x + C$ · **D.** $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cos 2x + C$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (x^2 + \sin 2x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Câu 12: Cho $f'(x) = 2x - \cos 2x$. Tìm $f(x)$ biết $f(0) = 0$.

- A.** $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x$ · **B.** $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x$ ·
C. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x$ · **D.** $f(x) = x^2 + \sin 2x$ ·

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x - \cos 2x)dx = x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Vậy $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

 **Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = (x+2)(x+1)$

- a)** $f(x) = x^2 + 3x - 2$ ·
b) $f'(x) = 2x + 3$ ·
c) $\int f(x)dx = \int (x+2)dx \cdot \int (x+1)dx$ ·
d) $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$ ·

Lời giải

a) Sai vì theo phép nhân đa thức $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

b) Đúng vì $f'(x) = 2x + 3$

c) Sai vì không có tính chất $\int f(x)dx = \int (x+2)dx \cdot \int (x+1)dx$.

d) Đúng vì $\int f(x)dx = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \int x^2dx + 3\int xdx + \int 2dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

a) $\int f(x)dx = \frac{\int (2x+1)dx}{\int (x-2)dx}$.

b) $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$.

c) $\int f(x)dx = 2x + 5\ln|x-2| + C$. (C hằng số).

d) Nếu $\int f(x)dx = ax + b\ln|x-2| + C$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thì $a+b = -3$.

Lời giải

a) $\int f(x)dx = \frac{\int (2x+1)dx}{\int (x-2)dx}$ sai theo tính chất của nguyên hàm.

b) Đúng vì $f'(x) = \frac{2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$

c) Đúng vì

$$\int \frac{2x+1}{x-2} dx = \int \frac{2x-4+5}{x-2} dx = \int \left(\frac{2x-4}{x-2} + \frac{5}{x-2} \right) dx = \int \left(2 + \frac{5}{x-2} \right) dx = 2x + 5\ln|x-2| + C.$$

d) Sai, vì ta có ở ý c: $\int \frac{2x+1}{x-2} dx = 2x + 5\ln|x-2| + C$.

Do đó $a=2$ và $b=5$.

Vậy $S = a+b = 2+5 = 7$.

Câu 3: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = 2^x - 4x$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$.

a) $F'(0) = 0$.

b) $F(1) = 0$.

c) $\int F(x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{3}x^3 + C$.

d) $\int \frac{f(x)}{x \cdot 2^x} dx = \ln|x| + \frac{4}{\ln 2} \cdot 2^{-x} + C$.

Lời giải

a) Ta có $F'(x) = f(x) = 2^x - 4x \Rightarrow F'(0) = 2^0 - 4 \cdot 0 = 1$.

$\Rightarrow$ Mệnh đề a) sai.

b) $\int f(x) dx = \int (2^x - 4x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 2x^2 + C \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} - 2x^2 + C$.

$F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^0}{\ln 2} - 2 \cdot 0^2 + C = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} - 2x^2 \Rightarrow F(1) = \frac{2}{\ln 2} - 2$.

$\Rightarrow$ Mệnh đề b) sai.

c) $\int F(x) dx = \int \left(\frac{2^x}{\ln 2} - 2x^2 \right) dx = \frac{2^x}{\ln^2 2} - \frac{2}{3}x^3 + C$.

$\Rightarrow$ Mệnh đề c) sai.

d) $\int \frac{f(x)}{x \cdot 2^x} dx = \int \frac{2^x - 4x}{x \cdot 2^x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - 4 \cdot 2^{-x} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - 4 \int 2^{-x} dx = \ln|x| + \frac{4}{\ln 2} \cdot 2^{-x} + C$

$\Rightarrow$ Mệnh đề d) đúng.

Câu 4: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x - \cos x$ trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn

$F(0) = \frac{2}{\ln 2}$.

a) $f(0) = 0$.

b) $F'(0) = 2$

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là $k = \sqrt{2^\pi}$.

d) $F(-1) = \frac{1}{2 \ln 2} + \sin 1$.

Lời giải

a) $f(0) = 2^0 - \cos 0 = 0$.

Vậy mệnh đề đã cho đúng.

b) $F'(x) = f(x) = 2^x - \cos x \Rightarrow F'(0) = 2^0 - \cos 0 = 1$.

Vậy mệnh đề đã cho sai.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là $k = F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{\frac{\pi}{2}} - \cos \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}^{\pi}$.

Vậy mệnh đề đã cho đúng.

$$d) \int f(x)dx = \int [2^x - \cos x]dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \sin x + C \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} - \sin x + C.$$

$$\text{Giả thiết } F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^0}{\ln 2} - \sin 0 + C = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} - \sin x$$

$$\Rightarrow F(-1) = \frac{2^{-1}}{\ln 2} - \sin(-1) = \frac{1}{2 \ln 2} + \sin 1.$$

Vậy mệnh đề đã cho đúng.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2 \tan x + 1} dx = \frac{x}{5} + \frac{a}{b} \ln |2 \sin x + \cos x| + C$, với $a; b \in \mathbb{Q}^*$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $P = a + 2b$ bằng?

Lời giải

Đáp án : 12

$$\text{Ta có } I = \int \frac{1}{2 \tan x + 1} dx = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} dx.$$

$$\text{Đặt } J = \int \frac{\sin x}{2 \sin x + \cos x} dx.$$

$$\text{Khi đó } 2J + I = \int \frac{2 \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx + \int \frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} dx = \int \frac{2 \sin x + \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C_1 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác ta lại có : } 2I - J = \int \frac{2 \cos x - \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx = \ln |2 \sin x + \cos x| + C_2 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow I = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln |2 \sin x + \cos x| + C.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 12.$$

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(1; -3)$. Tính $f(-1)$

Lời giải

Đáp án 7.

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 + 2x - m + 1)dx = x^3 + x^2 + (1-m)x + C$.

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f(2)=1 \\ f(1)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^3 + 2^2 + (1-m).2 + C = 1 \\ 1+1+(1-m)+C = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+C = -13 \\ -m+C = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ C=1 \end{cases}.$$

Suy ra $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$. Vậy $f(-1) = 7$.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2021)$ viết dưới dạng $a + \frac{1}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$). Tổng $a+b$ bằng?

Lời giải

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$:

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.$$

Khi đó

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{(2x+1)}{(x^2+x)^2} dt = \int \frac{1}{(x^2+x)^2} d(x^2+x) = -\frac{1}{x^2+x} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C.$$

$$\text{Mặt khác, } F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1 = -\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] + 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2021) = -\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2021.2022}\right) + 2021 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right) + 2021 = -\left(1 - \frac{1}{2022}\right) + 2021 \\ &= 2020 + \frac{1}{2022} = a + \frac{1}{b}. \text{ Suy ra } a = 2020; b = 2022. \end{aligned}$$

Vậy tổng $a+b = 2020 + 2022 = 4042$.

Câu 4: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7$ (m/s²). Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s), hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s)?

Lời giải

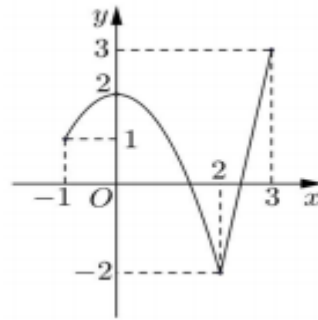
Đáp án : 8.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } v(t) &= \int a(t)dt = \int (2t - 7)dt = t^2 - 7t + C, \text{ mặt khác } v(0) = 10 \text{ nên } C = v(0) = 10. \\ \Rightarrow v(t) &= t^2 - 7t + 10. \end{aligned}$$

$$\text{Để chất điểm đạt vận tốc } 18 \text{ (m/s) thì } v(t) = 18 \Leftrightarrow t^2 - 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \text{ (nhận)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vậy tại thời điểm $t = 8$ (s) thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s).

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, có đồ thị là một phần của parabol và một phần là đoạn thẳng như trong hình bên dưới. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ thỏa mãn $F(-1) = -\frac{5}{3}$. Giá trị của $F(0) + F(3)$ bằng bao nhiêu? (kết quả lấy đến chữ số thập phân thứ nhất sau dấu phẩy).



Lời giải

Đáp án : 1,8.

+) Trên $[-1; 2]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là một phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua

$$\text{các điểm } (-1; 1), (0; 2), (2; -2) \text{ nên } \begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \\ c = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + 2.$$

+) Trên $[2; 3]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đoạn thẳng $(d): y = mx + n$ đi qua các điểm

$$(2; -2), (3; 3) \text{ nên } \begin{cases} 2m + n = -2 \\ 3m + n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = -12 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 5x - 12.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{ khi } -1 \leq x \leq 2 \\ 5x - 12 & \text{ khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$\text{+) Từ đó } F(x) = \begin{cases} \frac{-x^3}{3} + 2x + C_1 & \text{ khi } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{5x^2}{2} - 12x + C_2 & \text{ khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Do } F(-1) = -\frac{5}{3} \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$\text{Ta có } F(x) \text{ liên tục tại } x = 2 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-x^3}{3} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{5x^2}{2} - 12x + C_2 \right) \Rightarrow C_2 = \frac{46}{3}.$$

$$\text{Khi đó : } F(x) = \begin{cases} \frac{-x^3}{3} + 2x & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{5x^2}{2} - 12x + \frac{46}{3} & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(0) + F(3) = \frac{11}{6} \approx 1,8.$$

Câu 6: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t phút. Biết $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 phút thì thể tích nước trong bể là 150 dm^3 , sau 10 phút thì thể tích nước trong bể là 1100 dm^3 . Thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 phút là bao nhiêu dm^3 ?

Lời giải

Đáp án: 8400.

$$\text{Ta có: } h(t) = \int h'(t) dt = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + b \frac{t^2}{2} + C.$$

$$\text{Do ban đầu bể không có nước nên } h(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + b \frac{t^2}{2}.$$

$$\text{Lúc 5 phút: } h(5) = a \cdot 5^3 + b \cdot \frac{5^2}{2} = 150 \quad (1).$$

$$\text{Lúc 10 phút: } h(10) = a \cdot 10^3 + b \cdot \frac{10^2}{2} = 1100 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } a = 1, b = 2 \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2 \Rightarrow h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400 \text{ dm}^3.$$

♦ **Đề 3:**

 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\square$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $\int (f(x) + g(x)).dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx.$

B. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx.$

C. $\int (f(x) - g(x)).dx = \int f(x).dx - \int g(x).dx$

D. $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$, với k là hằng số khác 0.

Lời giải

Ta có B là khẳng định sai.

Câu 2. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4$ là

- A.** $x^4 + C$. **B.** $4x^3 + C$. **C.** $\frac{x^5}{5} + C$. **D.** $x^5 + C$.

Lời giải

Ta có $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$. Vậy đáp án đúng là C.

Câu 3. Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $F(1) = 1$, tính $F(4)$.

- A.** 7. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$.

Khi đó: $F(1) = 1 \Leftrightarrow C = -1$. Suy ra $F(4) = 4 - 1 = 3$. Vậy đáp án đúng là D.

Câu 4. Tìm khẳng định đúng.

- A.** $\int \sin x \cdot dx = \cos x + C$. **B.** $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$.
C. $\int \cos x \cdot dx = -\sin x + C$ **D.** $\int \cos 2x \cdot dx = \sin 2x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$. Vậy đáp án đúng là B.

Câu 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C$. **B.** $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C$.
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C$. **D.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C$.

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A.** $e^x + \frac{x^2}{2} + C$. **B.** $e^x + x^2 + C$. **C.** $\frac{e^x}{\ln 2} + x^2 + C$. **D.** $e + \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải

Ta có $\int (e^x + x) dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 7. Tính $\int \frac{1}{x \ln 2} \cdot \log_2 x dx$.

A. $\log x^2 + C$.

B. $\frac{\log_2^2 x}{2} + C$.

C. $\log_2^2 x + C$.

D. $\frac{\log_2 x^2}{2} + C$.

Lời giải

Ta có

$$\int \frac{1}{x \ln 2} \cdot \log_2 x dx = \int \log_2 x \cdot \left(\frac{1}{x \ln 2} \right) dx = \int \log_2 x \cdot (\log_2 x)' dx = \int \log_2 x dx (\log_2 x) = \frac{\log_2^2 x}{2} + C.$$

Câu 8. Tính $\int \frac{2}{x} \cdot \ln x dx$.

A. $\ln^2 x + C$.

B. $\ln x^2 + C$.

C. $\ln x + C$.

D. $2 \cdot \ln x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \frac{2}{x} \cdot \ln x dx = 2 \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx = 2 \int (\ln x)' \cdot \ln x dx = 2 \int \ln x d(\ln x) = 2 \frac{\ln^2 x}{2} = \ln^2 x$.

Câu 9. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{x^2 - 2025}{x(x^2 + 2025)} dx$.

A. $I = \ln \left| x - \frac{2025}{x} \right| + C$.

B. $I = \ln \left| 1 - \frac{2025}{x} \right| + C$.

C. $I = \ln \left| x + \frac{2025}{x} \right| + C$.

D. $I = \ln \left| 1 + \frac{2025}{x} \right| + C$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{x^2 - 2025}{x(x^2 + 2025)} dx = \int \frac{1 - \frac{2025}{x^2}}{x + \frac{2025}{x}} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{2025}{x} \right)} d \left(x + \frac{2025}{x} \right)$

Vậy $I = \ln \left| x + \frac{2025}{x} \right| + C$.

Câu 10. Biết $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2025} + \sqrt{x+2024}} = a(x+2025)\sqrt{x+2025} + b(x+2024)\sqrt{x+2024} + C$ với a, b là các số hữu tỉ và C là hằng số bất kì. Tính $S = 2025a + 3b$.

A. 1348.

B. 4049.

C. -1348.

D. 1352.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \int \frac{dx}{\sqrt{x+2025} + \sqrt{x+2024}} &= \int \frac{\sqrt{x+2025} - \sqrt{x+2024}}{x+2025 - (x+2024)} dx = \int (\sqrt{x+2025} - \sqrt{x+2024}) dx \\ &= \frac{2}{3}(x+2025)\sqrt{x+2025} - \frac{2}{3}(x+2024)\sqrt{x+2024} + C.\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{3}. \text{ Vậy } S = 2025a + 3b = 1348.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-45; 45\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2025}$, $f(25) = 0$. Tính $f(-50)$ thuộc khoảng nào?

A. $(0; 1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 2025} dx = \frac{1}{90} \int \left(\frac{1}{x-45} - \frac{1}{x+45} \right) dx = \frac{1}{90} \ln \left| \frac{x-45}{x+45} \right| + C$$

$$\text{Mà } f(25) = 0 \Rightarrow \frac{1}{90} \ln \frac{2}{7} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{90} \ln \frac{2}{7}$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{1}{90} \ln \left| \frac{x-45}{x+45} \right| - \frac{1}{90} \ln \frac{2}{7}$$

$$\text{Do đó } f(-50) = \frac{1}{90} \ln 19 - \frac{1}{90} \ln \frac{2}{7} = \frac{1}{90} \ln \frac{133}{2} \approx 0,047 \in (0; 1)$$

Câu 12. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{x^2 + 45}{x^4 - 90x^2 + 2025} dx$.

A. $I = \ln \left| \frac{x^2 + x - 45}{x^2 - x - 45} \right| + C.$

B. $I = \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C.$

C. $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 + x - 45}{x^2 - x - 45} \right| + C.$

D. $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C.$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } I &= \int \frac{x^2 + 45}{x^4 - 91x^2 + 2025} dx = \int \frac{1 + \frac{45}{x^2}}{x^2 - 91 + \frac{2025}{x^2}} dx = \int \frac{\left(1 + \frac{45}{x^2}\right)}{x^2 + \frac{45^2}{x^2} - 91} dx = \int \frac{\left(1 + \frac{45}{x^2}\right)}{\left(x - \frac{45}{x}\right)^2 - 1} dx \\ &= \int \frac{1}{\left(x - \frac{45}{x}\right)^2 - 1} d\left(x - \frac{45}{x}\right) = \frac{1}{2} \left[\ln \left| x - \frac{45}{x} - 1 \right| - \ln \left| x - \frac{45}{x} + 1 \right| \right] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C. \\ \text{Vậy } I &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C.\end{aligned}$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Các phát biểu dưới đây đúng hay sai?

a) $\int 2x dx = x^2 + C$

b) $\int (4x^3 + 2x + 1) dx = x^4 + x^2 + x + C$

c) Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 10 + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) thì $a + b + c = 30$.

d) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 4x^3 - m + 1$, $f(2) = 1$ và có đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Nếu $f(x) = ax^4 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì $a + b + c = -7$.

Lời giải

Câu 13
Đ
Đ
S
S

a, b. Áp dụng quy tắc $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$

và tính chất $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$. Ta được:

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

$$\int (4x^3 + 2x + 1) dx = 4 \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^2}{2} + x + C = x^4 + x^2 + x + C.$$

c) Áp dụng định nghĩa nguyên hàm, ta có:

$$F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow f(x) = F'(x) = 15x^2 + 8x - 7.$$

Vậy $a+b+c=16$.

d) Ta có: $f(x) = x^4 - (m-1)x + C$

Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases} C=3 \\ 16-(m-1).2+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=3 \\ m-1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=3 \\ m=10 \end{cases}$

Do đó: $f(x) = x^4 - 9x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-9 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=-5.$

Câu 2: Các phát biểu dưới đây đúng hay sai?

a) Một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{2x}$ là $\frac{1}{2} \ln|x|$.

b) Nếu $x > 0$ thì nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$ là $\ln x - \frac{3}{x} + C$

c) Một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ là $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \cdot \ln|x|$.

d) Nếu $F(x) = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)^2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) thì

$a+b+c=12$.

Lời giải

Câu 14
Đ
Đ
S
S

a, b. Áp dụng quy tắc $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ($x \neq 0$) và $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$ ($x \neq 0$)

Với $x > 0$ ta có: $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + C$ và $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \ln x - \frac{3}{x} + C$.

c) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x} dx = \int \left(x - 3 + \frac{2}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln|x| + C$

Vậy mệnh đề c sai.

d) Áp dụng định nghĩa nguyên hàm, ta có:

$$F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 10}{(x+1)^2}.$$

Vậy $a+b+c=-4$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}$.

b) Một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là $G(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 1$.

c) Biết một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là $M(x)$ và $M(0) = 1$. Khi đó $M(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 1$.

d) Biết một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là $H(x)$ và $H(1) = -\frac{1}{4}$. Khi đó $H(2) = -1$.

Lời giải

a) Đúng.

Một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}$ vì $F'(x) = x^3 - 3x$.

b) Sai. $G'(x) = x^3 + 3x \neq f(x)$.

c) Đúng.

$f(x) = x^3 - 3x$ có nguyên hàm $M(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + m$. Mà $M(0) = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó $M(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 1$.

d) Đúng.

$f(x) = x^3 - 3x$ có nguyên hàm $H(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + C$.

Mà $H(1) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + C = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó $H(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 1 \Rightarrow H(2) = -1$.

Câu 4: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) Hàm $F(x) = x^4 + 5$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + 5x$.

b) Hàm $F(x) = \ln|x| + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.

c) Hàm $F(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 9x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 3) \cdot (4x + 3)$.

d) Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 3) \cdot (4x + 3)$ và $F(1) = -10$ thì $F(0) = 3$.

Lời giải

a) Sai.

b) Đúng.

c)

Sai.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 - 3) \cdot (4x + 3) dx = \int (4x^3 + 3x^2 - 12x - 9) dx = x^4 + x^3 - 6x^2 - 9x + C$$

d) Đúng.

$$F(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 9x + C \Rightarrow F(1) = -13 + C = -10 \Rightarrow C = 3. \text{ Suy ra } F(0) = 3.$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 2025.

$$\begin{aligned} +) \quad \text{Ta có} \quad f(x) &= \cos x \cdot \sin^2 x = \cos x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} (\cos x - \cos x \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} (\cos 3x + \cos x) = \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x. \end{aligned}$$

$$+) \quad F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x \right) dx = \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{12} \sin 3x + C.$$

$$\text{Lại có: } F(0) = 2025 \Rightarrow C = 2025 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{12} \sin 3x + 2025$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{12} \sin \frac{3\pi}{2} + 2025 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + 2025 = \frac{6076}{3} \approx 2025.$$

$$\text{Vậy } F\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 2025.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x(2x - 1)^{2025}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Tính $F(0)$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 1.

$$+) \text{ Ta có } f(x) = x(2x-1)^{2025} = \frac{1}{2}(2x-1+1)(2x-1)^{2025} = \frac{1}{2}(2x-1)^{2026} + \frac{1}{2}(2x-1)^{2025}.$$

$$\begin{aligned} +) \quad F(x) &= \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}(2x-1)^{2026} + \frac{1}{2}(2x-1)^{2025} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{(2x-1)^{2027}}{2027} + \frac{1}{4} \frac{(2x-1)^{2026}}{2026} + C = \frac{(2x-1)^{2027}}{8108} + \frac{(2x-1)^{2026}}{8104} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{(2x-1)^{2027}}{8108} + \frac{(2x-1)^{2026}}{8104} + 1$$

$$\Rightarrow F(0) = \frac{(-1)^{2027}}{8108} + \frac{(-1)^{2026}}{8104} + 1 \approx 1.$$

$$\text{Vậy } F(0) \approx 1.$$

Câu 3: Cho biết $I = \int \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} - c \ln|x| + d \ln|x+1| + C$, với a, b, c, d là số nguyên. Tính

$$S = a + b - c + d.$$

Lời giải

Trả lời: $S = -2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{1}{x(x+1)} \right]^2 dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right]^2 dx \\ &= \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x(x+1)} \right] dx = \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} \right] dx \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - 2 \ln|x| + 2 \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Đổi chiều yêu cầu bài toán ta có $a = -1; b = -1; c = 2; d = 2$, suy ra $S = a + b - c + d = -2$.

$$\text{Chú ý: } \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{(ax+b)'}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \int \frac{(ax+b)'}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$$

Câu 4: Một hòn đá được ném lên theo phương thẳng đứng, bỏ qua lực cản của không khí, với vận tốc ban đầu là $10(m/s)$, lấy $g = 10(m/s^2)$. Khi lên đến điểm cao nhất hòn đá rơi thẳng đứng đến khi chạm đất. Tính thời gian viên đá bay từ lúc ném lên đến khi chạm đất.

Lời giải

Trả lời: $2(s)$.

$$+ \text{ Vận tốc khi viên đá bay lên là } v_1(t) = \int -g dt = \int -10 dt = -10t + C.$$

+ Theo giả thiết ta có $v_1(0)=10 \Rightarrow C=10 \Rightarrow v_1(t)=-10t+10$.

+ Đến vị trí cao nhất thì viên đá dừng, ta có.

+ Quãng đường từ lúc ném đến khi viên đá đạt độ cao nhất là:

$$S_1(t) = \int v_1(t) dt = \int (-10t+10) dt = -5t^2 + 10t + C_1$$

+ Ta có $S_1(0)=0 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow S_1(t)=-5t^2+10t$.

+ Sau 1(s) viên đá đạt độ cao $\Rightarrow S_1(1)=5(m)$.

+ Vận tốc khi viên đá rơi xuống là $v_2(t) = \int g dt = \int 10 dt = 10t + C_2$.

+ Lúc bắt đầu rơi $v_2(0)=0 \Rightarrow C_2=0 \Rightarrow v_2(t)=10t$.

+ Quãng đường viên đá rơi xuống là: $S_2(t) = \int v_2(t) dt = \int 10t dt = 5t^2 + C_3$.

+ Ta có $S_2(0)=0 \Rightarrow C_3=0 \Rightarrow S_2(t)=5t^2$.

Do đó $5t^2=5 \Rightarrow t=1(s)$, suy ra thời gian viên đá rơi đến khi chạm đất là 1(s).

Vậy tổng thời gian viên đá từ lúc ném lên đến khi rơi xuống là 2(s).

Câu 5: Biết rằng hàm số $F(x)=x+2024$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$; hàm số $G(x)=\frac{x^2}{4}+2025$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$. Gọi $H(x)=\int f(x).g(x)dx$, biết $H(4)=4$. Tính $H(1)$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{1}{4}=0,25$

$$* f(x)=F'(x)=1; g(x)=G'(x)=\frac{x}{2}.$$

$$* H(x)=\int f(x).g(x)dx=\int \frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}+C$$

$$* H(4)=4 \text{ nên suy ra } C=0. \text{ Do đó } H(x)=\frac{x^2}{4}.$$

$$* H(1)=\frac{1}{4}=0,25.$$

Câu 6: Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao 3,0(m) đang không chứa nước. Người ta cần thay nước mới cho hồ bơi nên dùng máy bơm để bơm nước vào hồ, giả sử $h(t)$ (m) là chiều cao của mực nước đã được bơm vào tại thời điểm t giờ. Biết rằng tốc độ tăng chiều cao của mực nước tại giờ thứ t kể từ lúc bắt đầu bơm nước vào hồ là $h'(t)=\frac{\sqrt[3]{t+3}}{5}$. Hỏi sau bao

nhiều giờ kể từ lúc bắt đầu bơm thì hồ đạt được độ sâu 2,1(m) (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời : 6 .

$$* h(t) = \int h'(t) dt = \frac{1}{5} \int (t+3)^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} + C .$$

$$* h(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{9\sqrt[3]{3}}{20} \rightarrow h(t) = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} .$$

$$* h(t) = 2,1 \Leftrightarrow \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} = 2,1 \Leftrightarrow (t+3)^{\frac{4}{3}} \approx 18,33 \rightarrow t \approx 6 .$$

Vậy sau khi bơm khoảng 6 giờ thì độ sâu của mực nước trong hồ là 2,1 (m).